

Xác định trạng thái nội lực của các khâu động trong cơ cấu và máy

Đỗ Đăng Khoa^{1,*}, Phan Đăng Phong², Đỗ Sanh³

¹*Đại học Bách khoa Hà nội*

²*Viện Nghiên cứu Cơ khí*

³*Hội Cơ học VN*

*Email: khoa.dodang@hust.edu.vn

Tóm tắt. Bài toán xác định trạng thái nội lực trong các thanh động là một trong các bài toán khó, nó thuộc bài toán ngược, thường được xác định sau khi xác định trạng thái chuyển động (trạng thái gia tốc của thanh) và để xác định chúng thường sử dụng nguyên lý Đalămbe (Phương pháp Tĩnh hình học-Động lực). Trong bài báo này các tác giả đã sử dụng phương pháp ma trận truyền cho bài toán đặt ra và đã xây dựng một lộ trình xử lý bài toán có hiệu quả, có thể mở rộng áp dụng cho các hệ phức tạp nhờ việc trợ giúp các phần mềm tin học chuyên dụng ví dụ như Maple, Matlab... Bài báo sử dụng phương pháp ma trận truyền và một dạng phương trình đề xuất để xử lý bài toán cho riêng rẽ từng trường hợp. Đây là cơ sở cho việc giải quyết trạng thái nội lực cho các trường hợp phức tạp: chuỗi nhiều khâu (phẳng và không gian) và điều quan trọng là cho khả năng xác định trạng thái nội lực đối với chuỗi nửa đóng nửa mở, chuỗi các khâu đóng... là những chuỗi bị ràng buộc bởi các phương trình liên kết do không chọn được các tọa độ độc lập.

Từ khóa: Nội lực mặt cắt, Phương pháp Tĩnh hình học-Động lực, Phương trình đề xuất

1. Mở đầu

Việc xác định trạng thái nội lực trong các khâu động ngày càng được quan tâm khi tốc độ máy ngày càng tăng và khối lượng các khâu ngày càng được giảm theo tiêu chí giảm trọng lượng toàn máy. Trong các công trình cổ điển đây được xem là bài toán thuận, tức phải xác định trạng thái chuyển động trước (trạng thái gia tốc) và trên cơ sở đó xác định các lực nhờ Nguyên lý Đalămbe (phương pháp Tĩnh hình học - Động lực) [1]. Vấn đề này được quan tâm từ quan điểm giải tích, xác định đồng thời chuyển động và lực [2, 3, 4, 5]. A. I. Lurie đã đề xuất một phương pháp xác định phân lực nội lực mặt cắt của một khâu quay phẳng [2]. Cơ sở lý thuyết của phương pháp đề xuất là mặt cắt sẽ phân thành khảo sát thành hai thanh và đưa vào các tọa độ xác định vị trí của phần thanh bị tách rời. Để thanh được ghép lại như lúc chưa cắt cần đặt các điều kiện là các tọa độ được đưa vào phải bằng không. Các điều kiện này được xem là các phương trình liên kết và các phân lực của các liên kết này là các thành phần nội lực mặt cắt. Để xác định chúng các tác giả đã sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange [1]. Trong [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] các tác giả đã sử dụng phương pháp ma trận truyền và một dạng phương trình được đề xuất trong [6]. Phương pháp như vậy có lợi thế là tránh việc sử dụng các nhân tử Lagrange và điều quan trọng là có thể sử dụng các phần mềm tính toán. Việc sử dụng các phương pháp nêu trên có cơ sở lý thuyết là dựa trên phương pháp xử lý chuyển động cơ hệ chịu liên kết và có ưu điểm là xác định đồng thời trạng thái chuyển động và tất cả các yếu tố nội lực mặt cắt. Tuy nhiên các phương pháp này gặp không ít phức tạp, đặc biệt khi xử lý các cơ cấu máy như các chuỗi nhiều khâu, các chuỗi nửa hở nửa kín, các chuỗi kín... Hơn nữa trong nhiều trường hợp không cần xác định toàn bộ các thành phần mặt cắt mà chỉ cần xác định một trong các thành phần đó.

Dựa vào nhận xét là các tọa độ được đưa thêm vào độc lập đối với nhau, nên có thể xây dựng mô hình riêng rẽ tương ứng với từng yếu tố nội lực cần xác định. Trong báo cáo giải quyết bài toán bằng cách xây dựng mô hình cho các tọa độ tương ứng với các nội lực cần xác định và xác định chúng dựa trên ý tưởng xử lý bài toán điều khiển chuyển động chương trình [11, 12], xem các nội lực là các điều khiển cần xác định để cho mô hình bị cắt trở lại trạng thái cũ (không bị cắt). Trong báo cáo đã minh họa

trường hợp xác định mô men uốn trong thanh tay nắm của cơ cấu phẳng tay máy bóc xếp gồm hai khâu quay.

2. Mô hình khảo sát con lắc đơn

Bài toán Lurie [2]: trong bài toán này đã khảo sát trạng thái nội lực của một thanh quay quanh một trục cố định khi sử dụng mô hình với 4 tọa độ suy rộng (φ, u, v, θ) với điều kiện ràng buộc ($u=0, v=0, \theta=0$). Bài toán được xem là cơ hệ chịu ràng buộc bởi 3 phương trình liên kết:

$$f_1 \equiv u = 0; f_2 \equiv v = 0; f_3 \equiv \theta = 0; \quad (1)$$

Các phản lực tương ứng với các liên kết này chính là các nội lực mặt cắt (lực kéo nén, lực cắt, mômen uốn). Từ nhận xét các tọa độ (u, v, θ) là độc lập, có thể xây dựng mô hình riêng rẽ. Ví dụ:

Để xác định lực kéo- nén N xây dựng mô hình hai tọa độ (φ, u) (hình 1a) với phương trình liên kết:

$$f_1 \equiv u = 0 \quad (2)$$

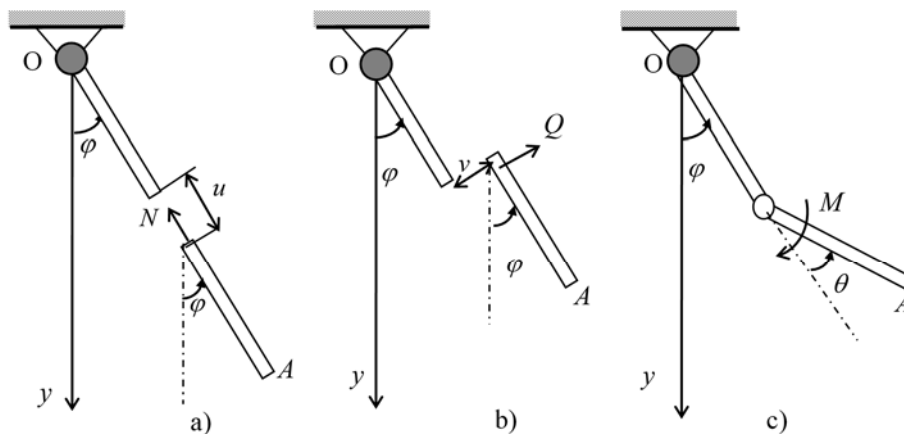
Với mô hình hai tọa độ (φ, v) (hình 1b) và phương trình liên kết:

$$f_2 \equiv v = 0 \quad (3)$$

thì phản lực liên kết chính là lực cắt Q tại mặt cắt. Còn mô hình với hai tọa độ (φ, θ) (hình 1c) với phương trình liên kết:

$$f_3 \equiv \theta = 0 \quad (4)$$

thì phản lực liên kết là mô men uốn M tại mặt cắt.



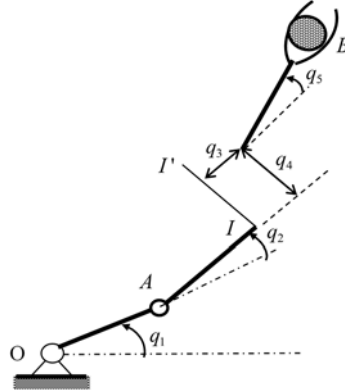
Hình 1. Các mô hình nội lực của con lắc

Việc thiết lập các mô hình trên có thể dựa trên Nguyên lý điều khiển chuyển động chương trình: xem các phương trình liên kết là các chương trình (cần thực hiện) mà để thực hiện chúng cần phải có các lực điều khiển để thực hiện chúng. Những lực điều khiển là các động lực từ khâu 1 tác dụng lên khâu 2 với mục đích để các liên kết được thực hiện. Các lực điều khiển chính là những nội lực mặt cắt cần tính.

3. Mô hình khảo sát con lắc kép

Dựa trên ý tưởng nêu trên, khảo sát tay máy hai khâu quay gồm OA và AB. Bài toán đặt ra là xác định mô men uốn tại tiết diện cách trục quay A một khoảng u. Để xử lý bài toán đề ra ta có thể mở

rộng mô hình của bài toán Lurie theo sơ đồ cho trên hình 2. Trong trường hợp này hệ có 5 tọa độ suy rộng (hình 2).



Hình 2. Mô hình khảo sát tay máy hai khâu

Vì nguyên trạng của bài toán là tay máy bốc xếp có hai bậc tự do, nên các điều kiện đặt ra ứng với ba điều kiện ràng buộc: các tọa độ q_3, q_4, q_5 lấy giá trị bằng không. Điều này sẽ được thực hiện khi đặt điều kiện thỏa mãn 3 phương trình liên kết dạng:

$$f_1 \equiv q_3 = 0 ; f_2 \equiv q_4 = 0 ; f_3 \equiv q_5 = 0 \quad (5)$$

Theo phương pháp đề xuất trong [3, 4, 5], bài toán được giải quyết theo lộ trình sau:

Gọi động năng của tay máy là $T(q_j, \dot{q}_j); (j = \overline{1,5})$ và các lực suy rộng ứng với các tọa độ suy rộng là $Q_j (j = \overline{1,5})$. Phương trình chuyển động của tay máy sẽ có dạng:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + R_j ; j = \overline{1,5} \quad (6)$$

Trong đó R_j là phản lực của các liên kết tác dụng lên cơ hệ, theo Nguyên lý Phù hợp chúng phải thỏa mãn các phương trình liên kết (5). Các liên kết được giả thiết là lý tưởng nên các phản lực liên kết phải thỏa mãn hệ thức sau:

$$\mathbf{DR} = \mathbf{0} \quad (7)$$

trong đó \mathbf{R} là ma trận cỡ 3×1 của các phản lực liên kết, còn \mathbf{D}^T là ma trận cỡ 3×2 của các hệ số trong biểu thức của gia tốc qua 2 gia tốc độc lập. Từ đây các ma trận và các vec tơ được đồng nhất với ma trận cột được viết bằng nét đậm. Trong bài toán khảo sát, khi chọn các gia tốc độc lập là các đại lượng \ddot{q}_1, \ddot{q}_2 , ma trận \mathbf{D} có dạng:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Từ hệ thức (7) ta nhận được $R_1 = 0, R_2 = 0$, tức phản lực ứng với tọa độ độc lập bằng không, còn R_3 phản lực ứng với tọa độ q_3 khác không, nó có thể được xem là lực điều khiển để thực hiện liên kết chương trình $q_3 = 0$ và chính là nội lực tại mặt cắt (mô men uốn).

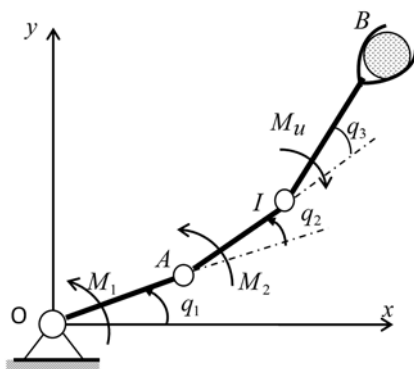
Hệ phương trình (6) được phân thành hai nhóm

Nhóm thứ nhất : gồm 2 phương trình, ứng với tọa độ độc lập không chứa các phản lực liên kết suy rộng và do đó có thể xác định chuyển động của cơ hệ qua tập các tọa độ suy rộng độc lập (với điều kiện đầu cho trước, chúng là các hàm theo thời gian)

Nhóm thứ hai : gồm 3 phương trình chứa các phản lực liên kết ứng với các tọa độ phụ thuộc và có thể tính là hàm theo thời gian nhờ các tọa độ độc lập là hàm theo thời gian tính từ nhóm phương trình thứ nhất. Điều quan trọng là dễ dàng chứng minh các phản lực này chính là các nội lực tại mặt cắt [2, 3, 12].

Vì các tọa độ được đưa vào (q_3, q_4, q_5) là không phụ thuộc vào nhau, nên có thể xây dựng mô hình cho từng trường hợp riêng rẽ và nhờ đó có thể lần lượt xác định từng nội lực và quan trọng là cho phép chỉ tính nội lực mà ta cần quan tâm.

Ví dụ khi chỉ cần xác định mô men uốn tại một tiết diện của khâu AB ta xây dựng mô hình dạng cơ cấu phẳng 3 khâu như hình 3



Hình 3. Mô hình khảo sát mô men uốn của tay máy hai khâu

Với 3 tọa độ suy rộng (q_1, q_2, q_3) chịu ràng buộc dạng:

$$f \equiv q_3 = 0; \quad (9)$$

Giả thiết khâu OA có chiều dài l_1 và có khối tâm tại O (được cân bằng tĩnh), mô men quán tính khối đối với trục O bằng J_1 , khâu AB có chiều dài l_2 khối lượng m_2 . Xác định mô men uốn tại mặt cắt cách trục quay A một khoảng $AI = u$. Mô hình được khảo sát gồm 3 khâu: khâu OA, khâu AI có chiều dài $l_{21} = u$ khâu IB có chiều dài l_{22} ($l_{21} + l_{22} = l_2$). Khối lượng các khâu tương ứng là m_{21}, m_{22} ($m_{21} + m_{22} = m_2$). Khối tâm của các phần thanh bị cắt cách các điểm A và I tương ứng bằng c_{21}, c_{22} . Mô men quán tính (khối) của các phần này đối với khối tâm lần lượt là J_{21}, J_{22} . Vật cản di chuyển có khối lượng m , được xem là chất điểm gắn tại đầu mút B.

$$D\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} = D\mathbf{Q} + D\mathbf{Q}^{qt} \quad (10)$$

Trong đó: \mathbf{A} - ma trận quán tính, \mathbf{Q} -ma trận của các lực suy rộng, \mathbf{Q}^{qt} -ma trận của các lực quán tính, được xác định dựa vào ma trận quán tính \mathbf{A} [11, 12]. Chú ý rằng phương trình (10) được thiết lập khi phương trình liên kết được thực hiện và kéo theo các đạo hàm của chúng triệt tiêu, tức:

$$q_3 = 0; \dot{q}_3 = 0; \ddot{q}_3 = 0 \quad (11)$$

Phương trình (10) cùng với phương trình liên kết (9) mô tả chuyển động hệ và phản lực liên kết chính là mô men từ phân bị cắt AM tác dụng lên phần BM để liên kết (9) được thực hiện (mô men uốn tại mặt cắt).

Từ phương trình liên kết (9) xác định được ma trận **D** là ma trận cỡ (2x3) dạng

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Các ma trận **A**, **Q** được xác định nhờ phương pháp ma trận truyền [11,12], còn ma trận của các lực quán tính $\mathbf{Q}^{qt} = \mathbf{Q}^0 - \mathbf{Q}^*$; $\mathbf{Q}^0, \mathbf{Q}^*$ được xác định từ ma trận quán tính **A**. Sau đây sẽ dùng ký hiệu ${}^0(\)$ để xác nhận biểu thức trong dấu ngoặc các đại lượng thỏa mãn điều kiện (5). Để tính ma trận quán tính, ta tính các ma trận truyền, chúng có các biểu thức:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & l_1 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{t}_3 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & l_{21} \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{r} = \begin{bmatrix} l_{22} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{t}_{11} &= \begin{bmatrix} -\sin q_1 & -\cos q_1 & 0 \\ \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{t}_{21} = \begin{bmatrix} -\sin q_2 & -\cos q_2 & 0 \\ \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{t}_{31} = \begin{bmatrix} -\sin q_3 & -\cos q_3 & 0 \\ \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{r}_{21} &= \begin{bmatrix} c_{21} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{r}_{22} = \begin{bmatrix} c_{22} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

Từ đây ký hiệu T ở góc phải cao nhất của ma trận được ký hiệu là phép tính chuyển vị. Các hệ số quán tính sẽ được tính theo các biểu thức sau:

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_{21} \mathbf{r}_{21}^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \mathbf{r}_{21} + m_{22} \mathbf{r}_{22}^T \mathbf{t}_3^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{r}_{22} + m \mathbf{r}^T \mathbf{t}_3^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{r} + J_1 + J_{21} + J_{22} \\ a_{12} &= m_{21} \mathbf{r}_{21}^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_2 \mathbf{r}_{21} + m_{22} \mathbf{r}_{22}^T \mathbf{t}_3^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{r}_{22} + m \mathbf{r}^T \mathbf{t}_3^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{r} + J_{21} \\ a_{22} &= m_{21} \mathbf{r}_{21}^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_{21} \mathbf{r}_{21} + m_{22} \mathbf{r}_{22}^T \mathbf{t}_3^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_{21} \mathbf{t}_3 \mathbf{r} + m \mathbf{r}^T \mathbf{t}_3^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_{21} \mathbf{t}_3 \mathbf{r} + J_{21} + J_{22} \\ a_{13} &= m_{22} \mathbf{r}_{22}^T \mathbf{t}_{31}^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{r}_{22} + m \mathbf{r}^T \mathbf{t}_{31}^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{r} + J_{22} \\ a_{23} &= m_{22} \mathbf{r}_{22}^T \mathbf{t}_{31}^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_{21} \mathbf{t}_3 \mathbf{r}_{22} + m \mathbf{r}^T \mathbf{t}_{31}^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_{21} \mathbf{t}_3 \mathbf{r} + J_{22} \\ a_{33} &= m_{22} c_{22}^2 + m l_{22}^2 + J_{22} \end{aligned} \quad (14)$$

Ma trận quán tính sẽ có dạng là

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Dựa vào ma trận quán tính sẽ tính được ma trận của các lực quán tính. Đầu tiên ta tính:

$$\partial_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{12}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{13}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{22}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{23}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial a_{13}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{23}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{33}}{\partial q_1} \end{bmatrix}; \partial_2 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{12}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{13}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{22}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{23}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial a_{13}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{23}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{33}}{\partial q_2} \end{bmatrix}; \partial_3 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_3} & \frac{\partial a_{12}}{\partial q_3} & \frac{\partial a_{13}}{\partial q_3} \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial q_3} & \frac{\partial a_{22}}{\partial q_3} & \frac{\partial a_{23}}{\partial q_3} \\ \frac{\partial a_{13}}{\partial q_3} & \frac{\partial a_{23}}{\partial q_3} & \frac{\partial a_{33}}{\partial q_3} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3]; \dot{\mathbf{q}}^* = \dot{q}_1^*; \dot{\mathbf{q}}_2^* = \dot{q}_2^*; \dot{\mathbf{q}}_3^* = \dot{q}_3^*$$

Lực suy rộng của các lực quán tính sẽ được tính theo biểu thức:

$$\mathbf{Q}^{qt} = \mathbf{Q}^0 - \mathbf{Q}^* \quad (17)$$

Trong đó:

$$\mathbf{Q}^0 = \begin{bmatrix} 0.5 \dot{\mathbf{q}}^T \partial_1 \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} \\ 0.5 \dot{\mathbf{q}}^T \partial_2 \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} \\ 0.5 \dot{\mathbf{q}}^T \partial_3 \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^0 \\ Q_2^0 \\ Q_3^0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^* = \partial_1 \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}^* + \partial_2 \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}_2^* + \partial_3 \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}_3^* \quad (18)$$

$$\mathbf{Q}^* = [Q_1^* \quad Q_2^* \quad Q_3^*]^T$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \pi}{\partial q_1} + M_1 & -\frac{\partial \pi}{\partial q_2} + M_2 & -\frac{\partial \pi}{\partial q_3} \end{bmatrix}^T$$

π – thế năng của cơ hệ, M_1, M_2 là các mômen tác dụng lên khâu OA và khâu AB tương ứng:

$$\pi = m_{21}g(l_1 \sin q_1 + c_{21} \sin(q_1 + q_2)) + m_{22}g(l_1 + l_{21} \sin(q_1 + q_2) + c_{22} \sin(q_1 + q_2 + q_3)) + mg(l_1 \sin q_1 + l_{21} \sin(q_1 + q_2) + c_{22} \sin(q_1 + q_2 + q_3)) \quad (19)$$

Theo Nguyên lý phù hợp [7, 11, 12] chuyển động hệ ứng với liên kết phải được thỏa mãn các liên kết:

$$q_3 = 0; \dot{q}_3 = 0; \ddot{q}_3 = 0 \quad (20)$$

Do đó để thực hiện điều kiện của bài toán đặt ra ta thay điều kiện (20) vào phương trình (10) và chúng được ký hiệu bởi "0" ở góc trái của đại lượng. Bằng cách đó ta nhận được:

$$\begin{aligned} {}^0 a_{11} &= m_{21}(l_1^2 + c_{21}^2 + 2l_1 c_{21} \cos q_2) + m_{22}(l_1^2 + (l_{21} + c_{22})^2 + 2l_1(l_{21} + c_{22}) \cos q_2) \\ &\quad + m(l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos q_2) + J_1 + J_{21} + J_{22} \\ {}^0 a_{12} &= m_{21}(c_{21}^2 + c_{21} l_1 \cos q_2) + m_{22}[(l_{21} + c_{22})^2 + l_1(l_{21} + c_{22}) \cos q_2] + m[l_2^2 + l_1(l_{21} + c_{22}) \cos q_2] \\ &\quad + J_{21} + J_{22} \\ {}^0 a_{22} &= m_{21}c_{21}^2 + m_{22}(l_{21} + c_{22})^2 + ml_2^2 + J_{21} + J_{22} \\ {}^0 a_{13} &= m_{22}c_{22}(l_{21} + c_{22} + l_1 \cos q_2) + m(l_{22}^2 + l_{21}l_{22} + l_1 l_{22} \cos q_2) + J_{22} \\ {}^0 a_{23} &= m_{22}c_{22}(l_{21} + c_{22}) + ml_2 l_{22} + J_{22}; \\ {}^0 a_{33} &= m_{22}c_{22}^2 + ml_2^2 + J_{22} \end{aligned} \quad (21)$$

Chú ý rằng mô men M_2 chỉ tác dụng lên khâu AM. Dựa vào các công thức (18) ta tính:

$$\begin{aligned}
 {}^0Q_1^{qt} &= 2[m_{21}c_{21} + m_{22}(l_{21} + c_{22}) + m(l_{21} + l_{22})]l_1 \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + [m_{21}c_{21} + m_{22}(l_{21} + c_{22}) \\
 &\quad + m(l_{21} + l_{22})]l_1 \sin q_2 \dot{q}_2^2 \\
 {}^0Q_2^{qt} &= [m_{21}c_{21} + m_{22}(c_{22} + l_{21}) + m(l_{21} + l_{22})]l_1 \sin q_2 \dot{q}_1^2 \\
 {}^0Q_3^{qt} &= -(m_{22}c_{22} + ml_{22})l_1 \sin q_2 \dot{q}_1^2
 \end{aligned} \tag{22}$$

Lực suy rộng của các lực hoạt động sẽ có dạng:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= M_1 - \frac{\partial \pi}{\partial q_1} - (m_{21} + m_{22} + m)gl_1 \cos q_1 - [m_{21}c_{21} + m_{22}(l_{21} + c_{22}) + m(l_{21} + l_{22})]g \cos(q_1 + q_2); \\
 Q_2 &= M_2 - \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = M_2 - [m_{21}c_{21} + m_{22}(l_{21} + c_{22}) + m(l_{21} + l_{22})]g \cos(q_1 + q_2); \\
 Q_3 &= M_3 - \frac{\partial \pi}{\partial q_3} = -(m_{22}c_{22} + ml_{22})g \cos(q_1 + q_2);
 \end{aligned} \tag{23}$$

Phù hợp với phương trình liên kết (9) ma trận \mathbf{D} cỡ (2x3) có dạng:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Hệ phương trình (10) có dạng:

$$\begin{aligned}
 {}^0a_{11}\ddot{q}_1 + {}^0a_{12}\ddot{q}_2 - Q_1 - {}^0Q_1^{qt}; \\
 {}^0a_{12}\ddot{q}_1 + {}^0a_{22}\ddot{q}_2 - Q_2 - {}^0Q_2^{qt}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Hệ phương trình này mô tả chuyển động của hệ thực hiện liên kết, tức hệ gồm hai khâu nối với nhau bởi khớp quay (con lắc kép). Hệ hai phương trình cùng với các điều kiện đầu xác định chuyển động của hệ, tức tính được $q_1(t), q_2(t)$. Để tính phản lực liên kết, tức mô men uốn tại tiết diện mặt cắt, ta sử dụng phương trình:

$${}^0a_{13}\ddot{q}_1(t) + {}^0a_{23}\ddot{q}_2 = {}^0Q_1 - {}^0Q_3^{qt} + R_3 \tag{26}$$

Trong đó R_3 là phản lực liên kết ứng với tọa độ q_3 , còn các gia tốc suy rộng $\ddot{q}_1(t), \ddot{q}_2(t)$ được tính từ hệ phương trình (25). R_3 chính là mô men uốn tại mặt cắt.

Trong dạng triển khai ta nhận được phương trình xác định chuyển động của tay máy (với điều kiện đầu với điều kiện đầu cho):

$$\begin{aligned}
 PT1: [J_1 + J_{21} + J_{22} + m_{21}(l_1^2 + c_{21}^2 + 2l_1c_{21}\cos q_2) + m_{22}[l_1^2 + (l_{21} + c_{22})^2 + 2l_1(l_{21} + c_{22})\cos q_2] \\
 + m(l_1^2 + l_2^2) + 2l_1l_2 \cos q_2]\ddot{q}_1 + [m_{21}(c_{21}^2 + c_{21}l_1 \cos q_2) + m_{22}((l_{21} + c_{22})^2 + l_1(l_{21} + c_{22})\cos q_2) \\
 + m(l_2^2 + l_1l_2 \cos q_2 + J_{21} + J_{22})]\ddot{q}_2 - M_1 + g[(m_2 + m)l_1 \sin q_1 + (m_{21}c_{21} \\
 + (m_{22}(l_{21} + c_{22}) + ml_{22})\sin(q_1 + q_2))] + 2(m_{21}c_{21} + m_{22}(l_{21} + c_{22}) + ml_2)l_1 \sin q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
 + (m_{22}(l_{21} + c_{22}) + ml_2 + m_{21}l_1)\dot{q}_2^2 = 0
 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 PT2: [l_1(m_{21}l_{21} + m_{22}(l_{21} + c_{22}) + ml_2)\cos q_2 q_1 + m_{21}c_{21}^2 + m_{22}(l_{22} + c_{22})^2]\ddot{q}_1 \\
 + [m_{21}c_{21}^2 + m_{22}(l_{21} + c_{22}) + ml_2^2 + J_{22}]\ddot{q}_2 - M_2 - g \sin(q_1 + q_2)[m_{21}c_{21} + m_{22}(l_{21} + c_{22})] \\
 - [m_{22}(l_{21} + c_{22}) + m_{21}c_{21} + ml_2]l_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 = 0
 \end{aligned}$$

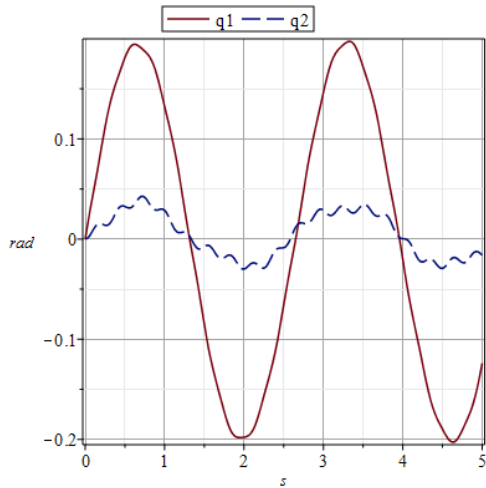
Phương trình xác định mô men nội lực: ($R_3 \equiv M_u$)

$$M^u = [m_{22}c_{22}(c_{22} + l_{21}) + ml_{22}^2 + l_1(m_{22}c_{22} + ml_{22})\cos(q_2(t)) + ml_{22}(l_{22} + u) + J_{22}]\ddot{q}_1(t) \\ + [m_{22}(c_{22} + u) + ml_{22}(l_{22} + u) + J_{22}]\ddot{q}_2(t) + (m_{22}c_{22} + ml_{22})l_1\sin q_2(t)\dot{q}_1^2(t) \\ + (m_{22}c_{22} + ml_{22})g\cos(q_1 + q_2) \quad (28)$$

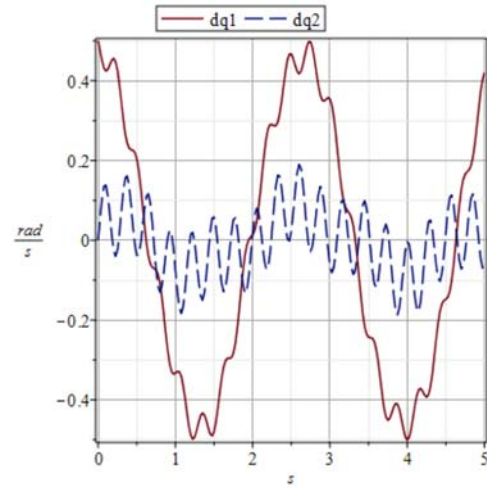
Kết quả tính toán: số liệu dùng tính toán mô phỏng cho ví dụ trên được lấy như sau:

$M_1 = 0.5\sin(2\pi t)$ Nm, $g = 10$ m/s²; $J_1 = 0.1$ kgm², $J_{21} = 0.1$ kgm², $J_{22} = 0.12$ kgm², $J_2 = 0.22$ kgm², $u = 0.4$ m, $l_{22} = 0.6$ m, $l_2 = 1.0$ m; $l_1 = 1.25$ m, $m_{21} := 0.06$ kg, $m_{22} = 0.04$ kg, $c_{21} = 0.2$ m, $c_{22} = 0.3$ m, $l_2 = 1$ m; $m = 10$ kg, $M_2 = 0.2$ Nm.

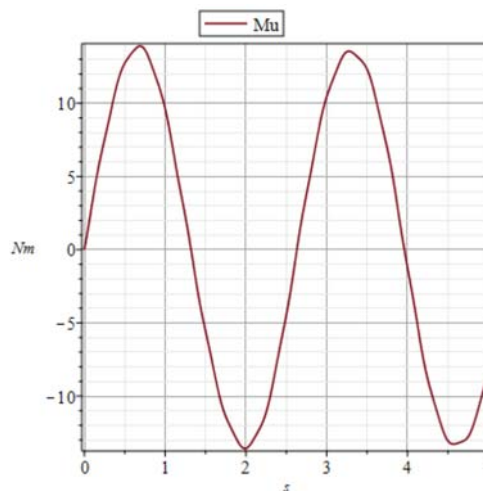
Đồ thị vị trí, vận tốc của hai tọa độ suy rộng độc lập q_1 và q_2 được thể hiện trên hình 4 và hình 5. Đồ thị mô men uốn nội lực trên khâu AB cách A một đoạn u được thể hiện trên hình 6.



Hình 4. Vị trí góc q_1 và q_2 của hai khâu



Hình 5. Vận tốc góc dq_1 và dq_2 của hai khâu



Hình 6. Nội lực mô men uốn trên khâu AB

4. Kết luận

Để xác định các yếu tố nội lực của mặt cắt của thanh động A. I. Lurie là người đầu tiên đã đưa ra phương pháp giải phóng liên kết để xác định phản lực liên kết với ý tưởng đồng nhất các phản lực liên kết với các yếu tố nội lực mặt cắt. Trong phương pháp được nêu ra A.I. Lurie đã sử dụng phương trình Lagrange dạng nhân tử. Điều này gặp khó khăn cho việc áp dụng phương pháp này vào các bài toán phức tạp như đối với bài toán nhiều khâu, đặc biệt đối với chuỗi hở, chuỗi kín, rô bốt song song,...

Trong bài báo các tác giả đã sử dụng dạng phương trình không nhân tử cho các cơ hệ với các tọa độ không độc lập kết hợp với phương pháp ma trận truyền để khảo sát bài toán, đồng thời đưa ra ý tưởng về bài toán điều khiển chuyển động chương trình cho giải quyết các bài toán xác định độc lập cho từng yếu tố nội lực mặt cắt. Phương pháp được đề xuất được minh họa cho bài toán xác định các yếu tố nội lực mặt cắt cho tay máy bốc xếp gồm hai khâu quay.

Tài liệu tham khảo

- [1] Đỗ Sanh, *Cơ học kỹ thuật- tập 2 Giáo trình Động lực học*, Nhà xuất bản Giáo dục, (2002).
- [2] Lurie A.I., *Cơ học giải tích (tiếng Nga)*, NXB Fizmatgiz., Moskva, (1961).
- [3] Đỗ Đăng Khoa, Phan Đăng Phong, Đỗ Sanh, Xác định nội lực động lực trong các thanh của tay máy công nghiệp, *Tuyển tập công trình hội nghị khoa học toàn quốc lần thứ 2 về Cơ kỹ thuật và tự động hóa*, NXB Bách khoa Hà nội, (2016).
- [4] Do Sanh, Do Dang Khoa, The Method of Determining Internal Forces at any Cross Section, *Vietnam Journal of Mechanics*, Vol. 26, No 2, pp.110-121, (2004).
- [5] Đỗ Sanh, Về việc xác định phản lực liên kết (tiếng Nga), *Tạp chí Toán học và Cơ học Ứng dụng*, Moskva, (1975).
- [6] Sanh Do, Phong Dinh Van, Khoa Do Dang, Duc Tran, A Method For Solving the Motion Equations of Constrained Systems, *16th Asia Pacific Vibration Conference*, Hanoi, Vietnam (2015).
- [7] Đỗ Sanh, *Chuyển động của các cơ hệ chịu liên kết*, Luận án Tiến sĩ Khoa học, Đại học Bách khoa Hà Nội, (1984).
- [8] Do Sanh, Do Dang Khoa, Applying Principle of Compatibility for Determining Reaction Forces of Constraints, *Machine Dynamics Problems*, Vol. 31, No. 1, 72-81, (2007)
- [9] Do Sanh, Do Dang Khoa, The Method of Transmission Matrix Applying for Investigation of Planar Mechanisms, *Machines Dynamics Research*, Vol.14, No 4, pp.5-22, (2010).
- [10] Đỗ Sanh, Đỗ Đăng Khoa, *Điều khiển các hệ động lực*, NXB Bách khoa, (2014).
- [11] Đỗ Sanh, Đỗ Đăng Khoa, *Động lực học giải tích*, Nhà xuất bản Bách khoa-Hà nội, (2017).
- [12] Do Sanh, Dinh Van Phong, Phan Dang Phong, Determining Reaction Forces in Planar Mechanisms, *Vietnam Journal of Mechanics*, Vol. 31, No 1, (2009).